Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – THÉORIE DE LA GRAVITATION

– Première séance d'exercices –

`relativité restreinte et espace-temps de Minkowski`

Tout au long de ce TP, on se place dans l'espace-temps de Minkowski $\mathcal{M}^{1,3}$ et on choisit $(-,+,+,+)$ comme signature de la métrique. Les lettres latines capitales $(P, Q, R, S, A, \ldots)$ désignent des événements de $\mathcal{M}^{1,3}$.

♡ **Exercice 0 : unités naturelles.** En gravitation, on utilise souvent le système d'unités $G = c = 1$ (« unités géométriques »). Montrer que, dans un tel système d'unités, masse, longueur, temps et énergie ont la même dimension :

$$[M] = [L] = [T] = [E].$$

Il n'y a donc qu'une seule dimension non-triviale, qui peut être choisie comme celle de la masse. (*Comparer avec les unités naturelles $\hbar = c = 1$ habituellement utilisées en QFT.)

♡ **Exercice 1 : futur et passé absolus.** Si Q appartient au futur (respectivement au passé) absolu de P, démontrer les deux affirmations suivantes :

a. Q se produit après (respectivement avant) P pour tous les observateurs inertiels ;

b. si P et Q sont séparés par un intervalle de genre temps, alors on peut trouver un observateur pour lequel ces deux événements se produisent au même endroit.

***Exercice 2 : ailleurs absolu.** Si Q appartient à l'ailleurs absolu de P, démontrer les deux affirmations suivantes :

a. Q se produit toujours ailleurs que P ;

b. Il est possible de trouver des observateurs inertiels pour lesquels Q se produit avant, en même temps ou après P.

♡ **Exercice 3.** Si Q est à l'intérieur ou sur le cône de lumière passé de P, on note $Q < P$. Montrer que si $R < P$ et $P < Q$, alors $R < Q$.

Exercice 4. Soit $P < A$ et $A < B$. Montrer que si B appartient au cône de lumière futur de P, alors P, A et B sont sur la même droite de genre lumière.

Exercice 5. Soient P et Q deux événements sur une droite de genre lumière donnée. Montrer que toute courbe causale qui joint P à Q coïncide avec la droite PQ entre P et Q.

♡ **Exercice 6.** En utilisant les résultats des exercices précédents, montrer que les lignes droites causales sont les courbes causales qui maximisent le temps propre entre deux événements donnés.

Exercice 7 : observateurs dans $\mathbb{R} \times T^3$. Considérons un espace-temps dont la partie spatiale est non pas $\mathbb{R}^3$, mais un trois-tore T^3 de coordonnées $(x, y, z) \sim (x + L, y, z) \sim (x, y + L, z) \sim (x, y, z + L)$. Soient deux observateurs dans cet espace-temps : A est au repos dans ces coordonnées, tandis que B se déplace à vitesse constante v le long de l'axe des x. A et B coïncident en $t = 0$, puis tandis que A reste au repos, B fait le tour de l'univers pour intersecter la ligne d'univers de A sans devoir accélérer. Quels sont les temps propres mesurés le long de ces 2 trajectoires entre les 2 moments où A et B se rencontrent à nouveau ? Est-ce en contradiction avec l'invariance de Lorentz ?

♡ **Exercice 8 : mouvement supraluminique.** Dans certains cas, un effet de projection peut amener à penser qu'un objet astrophysique se déplace plus vite que la lumière dans le vide. Considérer un quasar qui éjecte du gaz à une vitesse v et à un angle θ par rapport à la ligne de mire d'un observateur fixe. Projeté sur le ciel, le gaz semble se mouvoir perpendiculairement à la ligne de mire avec une vitesse apparente v_{app}.

a. En supposant que l'observateur se situe à grande distance de la source, dériver une expression pour v_{app} en fonction de v et de θ.
b. Montrer que, pour certaines valeurs de v et de θ, on peut avoir $v_{\mathrm{app}} > c$.
c. Pourquoi ce résultat n'est-il pas en contradiction avec les postulats de la relativité restreinte ?

***Exercice 9 : observateurs accélérés.** Inconscient des nombreuses crises majeures qui menacent la vie sur Terre à court et à moyen termes et préférant dilapider sa fortune de façon futile et délétère, un milliardaire envisage d'explorer le trou noir géant situé au centre de notre galaxie à environ 30 000 années-lumière de notre planète. Supposez que le moteur de la fusée fournit une accélération constante de 1g pendant la moitié du voyage et une accélération opposée de 1g pendant la deuxième moitié.

a. Soit τ le temps propre du milliardaire et u^μ sa quadri-vitesse. En se plaçant dans un référentiel inertiel centré sur la Terre et tel que $u^2 = u^3 = 0$, montrer que les équations du mouvement se réduisent à
$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}}{\mathrm{d}\tau} = A\,\mathcal{U}, \qquad \mathcal{U} \triangleq \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix},\ A \triangleq \begin{pmatrix} 0 & g \\ g & 0 \end{pmatrix}.$$
b. Intégrer ces équations pour obtenir le temps sur Terre $x^0(\tau)$ et la position de la fusée $x^1(\tau)$. On choisira des conditions initiales adaptées à la situation.
c. À quelle distance se trouvera la fusée après 40 années de vie sur Terre ?
d. Et après 40 années de vie du milliardaire dans sa fusée (dans le cas où la fusée continue toujours avec une accélération constante de 1g) ?
e. Calculer de combien d'années notre richissime inconscient aura vieilli au terme de son voyage.

NB : dans un système d'unités tel que $c = 1$, on notera la coïncidence numérique
$$g = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx \frac{10}{(365 \cdot 24 \cdot 3600)^{-1}}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{an} \cdot \mathrm{s}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{an} \cdot \mathrm{s}} \approx 1\,\mathrm{al}^{-1}.$$

En outre, $\sinh^{-1}(40) \approx 4{,}38$; $\cosh\Big(\sinh^{-1}(40)\Big) \approx 40$ et $\cosh^{-1}(15000) \approx 10{,}31$.